# Лекция 15 Приложения двойного интеграла.

Тлеулесова А.М.

*1) Некоторые геометрические приложения двойного интеграла.*

*2) Некоторые механические приложения двойного интеграла.*

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле
$$S = \iint\limits_D dxdy$$
Если область D определена, например, неравенствами $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$

то $$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами
$\alpha \le \theta \le \beta, \varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta)$, то $S = \iint\limits_D \rho d\rho d\theta = \int\limits_\alpha^\beta d\theta \int\limits_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho$

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью z=f(x,y), снизу плоскостью z=0 и сбоку прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости OXY область D. вычисляется по формуле: $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$

**Примеры с решениями**

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y - y^2, x + y = 6$

Решение. Найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему уравнений $x = 4y - y^2, x + y = 6$. В результате получим A(4;2), B(3;3).

Таким образом, $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int\limits_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy = \int\limits_2^3 (-y^2 + 5y - 6)dy = \left[-\frac{1}{3}y^2 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right]_2^3 =$

2. Найти площадь, ограниченную лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

Решение. Полагая $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, преобразуем уравнение кривой к полярным координатам.

В результате получим $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$. Очевидно, что изменению угла $\theta$ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ соответствует четверть искомой площади. Следовательно,

$$S = 4\iint\limits_D \rho d\theta d\rho = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/4} \rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = 2a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \sin 2\theta d\theta = -a^2[\cos 2\theta]_0^{\pi/4} = a^2$$

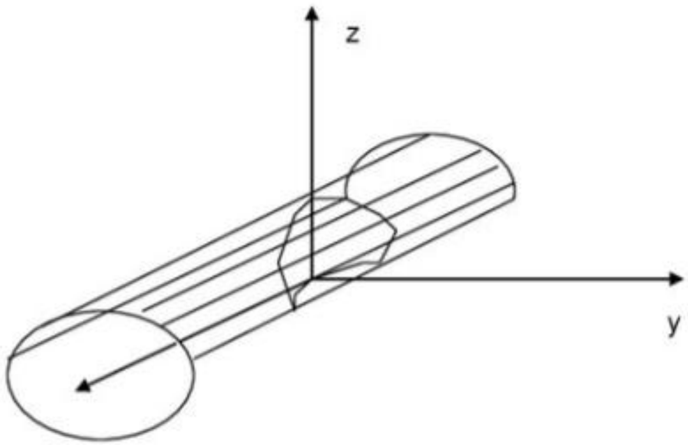
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$
и расположенного в первом октанте.

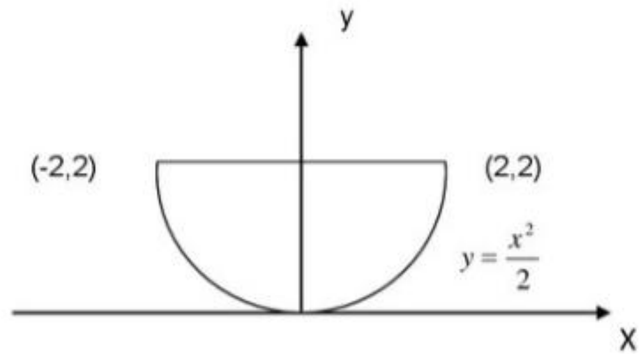
Решение. Тело, объем которого надо вычислить, ограничено сверху плоскостью $z=3x$, сбоку – параболическим цилиндром $y = 1 + x^2$ и плоскостью $y=5$.

Следовательно, это – цилиндрическое тело. Область D ограничена параболой $y = 1 + x^2$ и прямыми $y=5, x=0$. Таким образом, имеем

$$V = \iint_D 3xdxdy = 3\int_0^2 xdx \int_{1+x^2}^5 dy = 3\int_0^2 x \cdot [y]_{1+x^2}^5 dx = 3\int_0^2 (4x - x^2)dx = 3\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 12$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}$ и плоскостью $z=0$




<u>Решение</u>

Поверхность, ограничивающая тело сверху имеет уравнение $z = 4 - y^2$

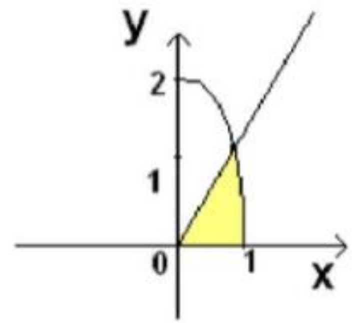
Область интегрирования D получается в результате пересечения параболы $y = \frac{x^2}{2}$ с линией пересечения цилиндра $z = 4 - y^2$ и плоскости $z=0$, то есть с прямой $y=2$. В виду симметрии тела относительно плоскости $OYZ$ вычисляем половину искомого объема

$$\frac{1}{2}V = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^2 (4 - y^2)dy = \int_0^2 (4y - \frac{y^3}{3})\Big|_{\frac{x^2}{2}}^2 dx = \int_0^2 (8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24})dx = (\frac{16}{3}x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^7}{168})\Big|_0^2 = \frac{128}{21}$$

$$V = \frac{256}{21} \approx 12{,}2$$

- Найти массу части пластинки,
- ограниченной линиями:

$$D:\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1, \\ 0\le y\le x \end{cases} \quad \mu(x,y)=y^2 \qquad \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2^2}\le 1$$




Преобразуем уравнение границы в обобщённые полярные координаты: $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=2\rho\sin\varphi \end{cases}$

Найдём уравнение луча $OM_0$ : $x^2+\dfrac{x^2}{4}=1\Rightarrow\dfrac{5x^2}{4}=1\Rightarrow x_1=y_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\rho\cdot\cos\varphi,\frac{2}{\sqrt{5}}=2\rho\cdot\sin\varphi\Rightarrow \mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$$

- Таким образом область D в обобщённых полярных координатах определяется следующими неравенствами:

$$\overline{D}:\begin{cases}0\le\rho\le 1\\ 0\le\varphi\le \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\end{cases}$$

Тогда масса пластинки выражается формулой:

$$M=\iint\limits_{S}\mu(x,y)ds=\iint\limits_{D}\mu(x(\rho,\varphi),y(\rho,\varphi))2\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{1}(2\rho\cdot\sin\varphi)^{2}\cdot 2\rho\cdot d\rho=\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\sin^{2}\varphi d\varphi\int\limits_{0}^{1}4\rho^{2}\cdot 2\rho d\rho=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\left\langle\sin 2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^{2}\varphi}\right\rangle=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{2}{5}$$